吴文俊先生的思想对我学术研究的影响

2017-05-07 顾险峰 老顾谈几何

来源：百度百科。

今天（2017年5月7日）惊闻吴文俊先生仙逝，宛若晴天霹雳，令人无限感伤。我虽然从未有幸和吴先生见面，但却多次通过电子邮件得到他亲自教诲。我的学术生涯受到了吴文俊先生光辉思想的深刻影响。

中国风格的数学-构造性算法

在我学习数学的历程中，所接触的主要定理和理论框架都是由西方人所创立，极少见到中国数学家的名字。更有极少数西方学者狂妄宣称：中华民族虽然历史悠久、人口众多，但是只积累了经验性的知识，对于人类文明没有实质性贡献。年轻时代，我在北美留学，西方同学的轻蔑经常令

我悲愤而无奈。直到学习了吴先生关于中国古代数学的系统论述，才令我体会到中国传统数学的伟大和深邃。

西方主要遵循公理体系，依靠逻辑演绎来构建数学大厦；吴先生指出中国古代的数学传统是依靠算法来构造理论体系。为了真正将抽象晦涩的纯粹数学转化成切实的生产力，只有逻辑演绎是远远不够的，必须建立构造性证明。在绝大多数的情况下，构造性证明方法的难度远超过逻辑演绎的方法。

比如，如下图所示的三维人脸表情分类问题：给定带有表情的三维人脸曲面，如何自动将其依照表情分类。一种方法是将人脸曲面保角地映到平面单位圆盘，将曲面的面元定义为圆盘上的概率测度。不同概率测度间可以计算最优传输映射，传输映射的代价给出了概率测度间的Wasserstein距离。通过Wasserstein距离，我们可以将曲面进行分类。这里最优传输映射等价于求解蒙日-安培方程，其解的存在性证明由Alexandrov用代数拓扑方法给出。这种方法无助于直接求解。数十年后，在丘成桐先生的指导下，我们发现了基于变分法的构造性方法，从而真正实现了几何数据分类的实用算法。

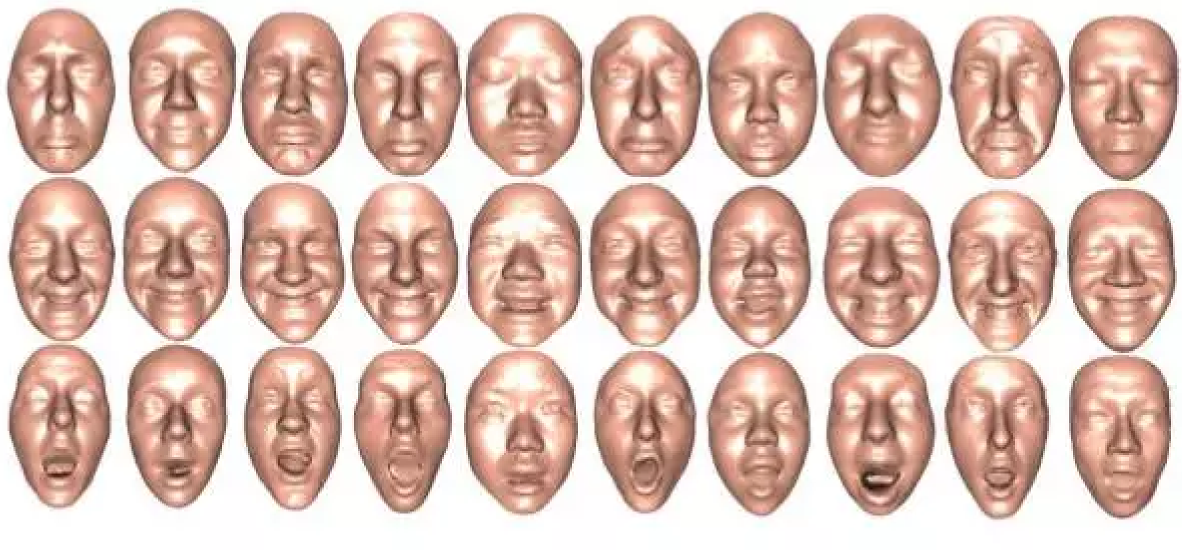

Fig. 10: Face surfaces for expression clustering. The first row is “sad”, the second row is “happy” and the third row is “surprise”.

从历史观点来看，现代计算机科学的迅猛发展，要求将纯粹数学的抽象理论进一步发展成构造性算法，从而利用计算机来改造社会和自然，而这正是中国数学源远流长的传统。数十年来，我的科研工作集中于计算共形几何，本质上就是将纯粹数学中的共形几何改造成完全基于构造性证明的算法体系，从而彻底与计算机科学融合。其过程异常曲折和艰辛，既有学术研究方面的本质难度，又有社会因素。

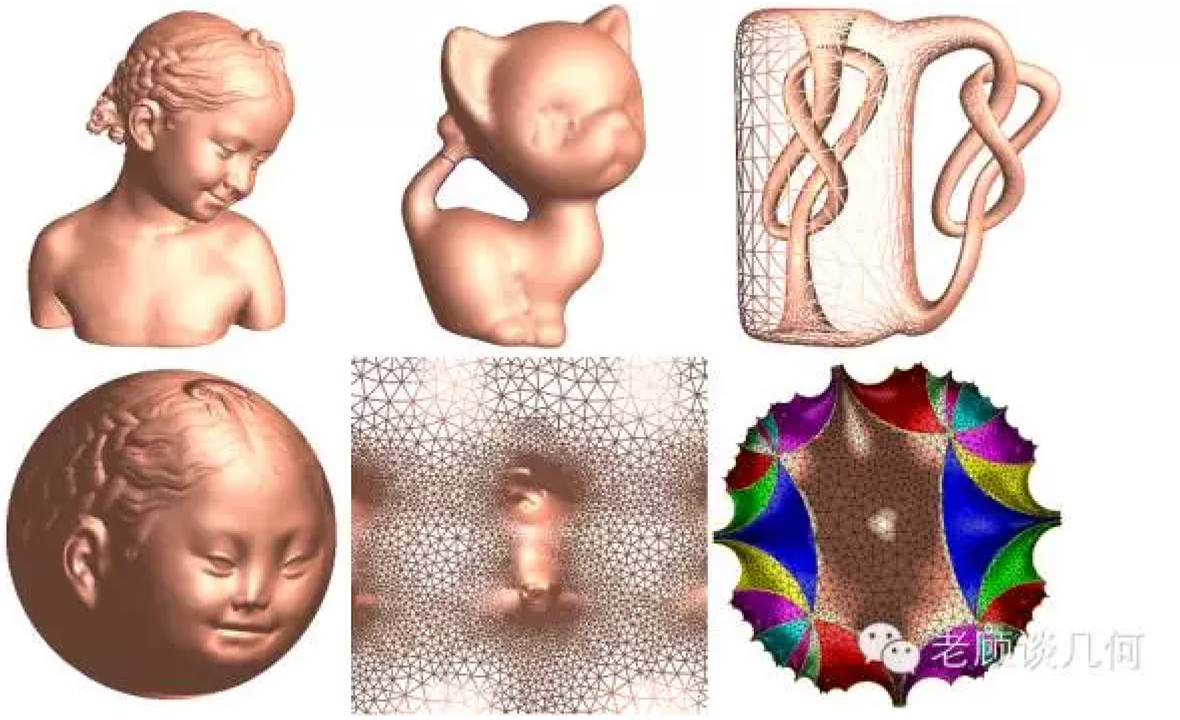

图1. 曲面单值化定理。

从学术方面而言，同一个几何理论有多种理解方式和证明途径，但是真正能够发展出成熟算法的途径往往需要对各种相关理论全都透彻理解并且深入尝试之后才能找出。例如图1所示的曲面单值化定理，任何封闭带黎曼度量的曲面，都可以找到一个新的度量，和初始度量共形等价，同时高斯曲率为常值。为了寻找这一基本定理的构造性证明，我们十数年如一日，尝试了很多方法，经历了许多挫折，包括基于非线性热流方法的调和映照，基于Hodge理论的全纯微分和曲面里奇流方法等等。从社会因素而言，传统的纯粹数学家认为基本几何定理已经发掘，构造性证明原创性不大，因而予以忽视；传统的计算机科学家认为如此抽象的学院派理论和实际相距太远，或者经验性的方法虽然不够严密，但是足够实用，因此难以支持。在过去的岁月中，我们经受了很多挫折和磨砺，每当事业遇到低谷，沮丧犹疑之际，我们就会重温吴先生的工作。吴先生关于中国数学传统的深刻洞察，吴先生关于构造性证明的价值观念，特别是吴先生特立独行，坚持自己的数学品味，无一不给我们巨大的精神支持和鼓励。

我们坚信吴文俊先生的观点：构造性算法式证明是中国传统数学的宝贵传统，相比于停留在逻辑演绎层面的理论体系，算法体系才是纯粹数学的终极形式，具有严密理论根基的实用性算法才能和计算机科学紧密结合，从而推动人类文明的前进。虽然暂时不被人们理解，我们被吴文俊先生光辉思想所指引，坚信自己工作的历史价值，会更加坚定不移地奋斗下去！

计算机辅助设计-示性类理论

在计算机辅助设计领域（Computer Aided Design，CAD），各种几何曲面都有分片有理多项式（NURBS）来逼近，即所谓的样条表示（Spline Representation）。在进行工业设计的时候，人们往往需要曲面具有较高的光滑性，例如轿车表面需要曲率连续，即所谓的C^2光滑性。拓扑简单

的样条曲面理论已经发展完备，例如经典的极形式理论（Polar form， Blossom）。如何构建拓扑复杂的样条曲面，使得其具有全局的C^2光滑性，一直是CAD领域最为核心的基本问题。数十年来，这一问题一直悬而未决，困扰了无数的科学家和工程技术专家。在两千年左右，秦宏教授和我深入地研究了这一问题，最后我们建立了流形样条理论，这一理论的本质是吴文俊先生的示性类理论。

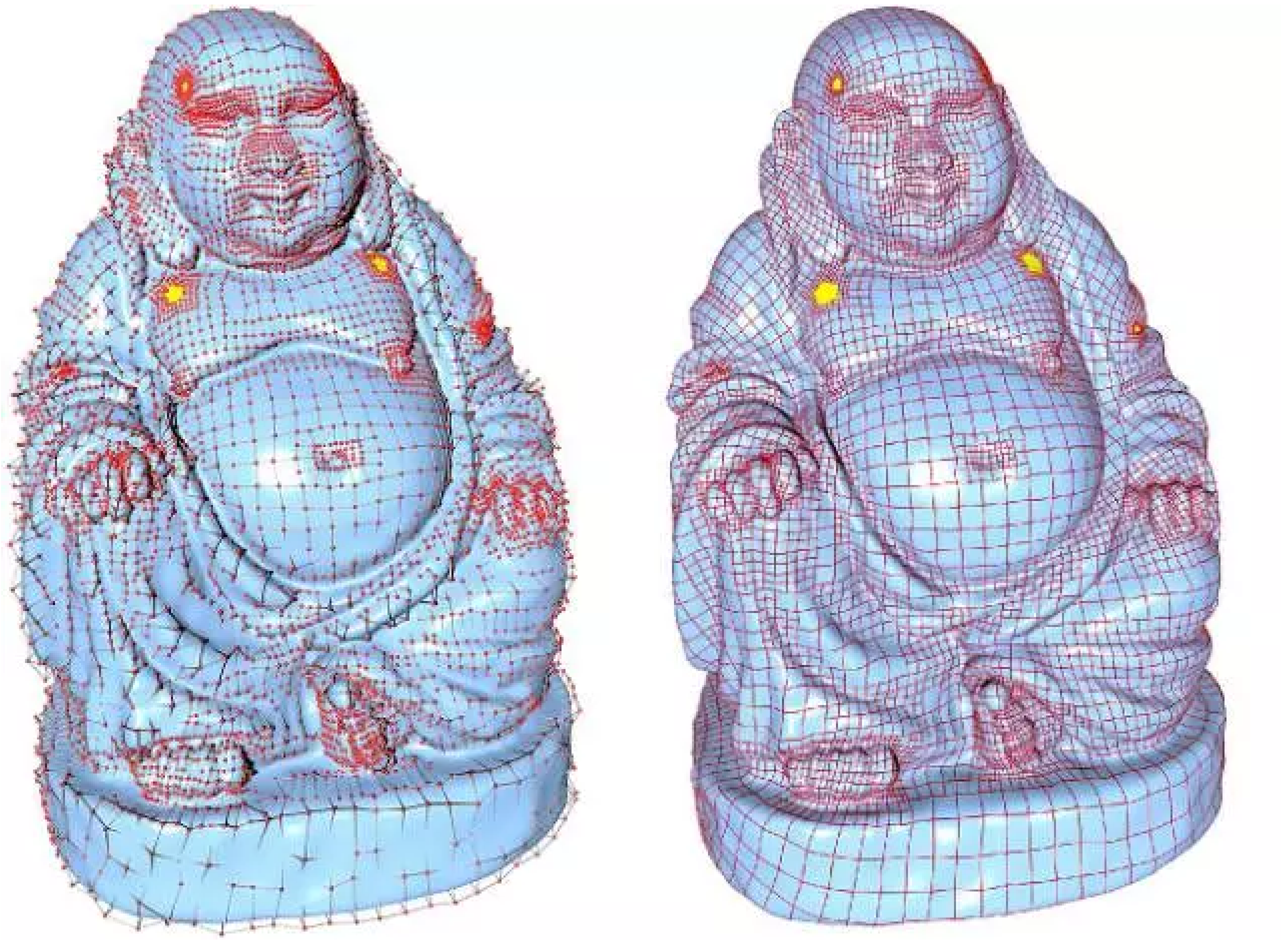

图2. 流形样条。

传统的样条理论实质是建立在仿射几何（Affine Geometry）基础之上的，样条表示等价于极形式，其构造基本部件是控制点对应参数的仿射不变量。如果我们能够将传统样条理论推广到流形上，那么我们需要这个流形容许仿射几何，换言之这个流形具有仿射结构（Affine Structure）。例如，如果我们能够在一张封闭的曲面S上定义极形式，我们需要找到曲面一个图册（Atlas），使得所有的局部坐标变换都是仿射变换。那么，如何判定给定的曲面上是否存在仿射结构？吴文俊先生的示性类理论给出了这一问题直接了当的回答：如果曲面存在仿射结构，则其拓扑障碍类为0。具体而言，仿射结构诱导一个曲率为0的联络，其示性类为0，在曲面情形，曲面亏格为1。这一理论指出了当初CAD领域样条理论的根本缺陷，同时给出了流形样条的构造方法，指导了这一领域的理论发展。

计算机辅助制造-示嵌类

在计算机辅助制造（Computer Aided Engineering）和计算力学领域，经常对机械零件进行物理模拟仿真，在实体上求解各种偏微分方程。经典的方法是将实体进行四面体三角剖分，即所谓的网格生成问题（Mesh Generation）。一般情况下，为了保证网格的质量，人们需要在网格中加入Steiner点，并且进行Delaunay三角剖分。这里面具有许多基本的组合几何问题，例如给定实体在不加点的情况下是否存在三角剖分（Decomposible）；给定一个三角剖分，是否存在一个四面体的排序方式，使得每次拿掉一个四面体，不改变余下复形的拓扑（Shellability）。这些组合几何问题本质上和吴文俊先生发展的示嵌类、示痕类有着本质的联系，它们给出了一个拓扑复形在欧式空间中嵌入方式的全局拓扑障碍。

图3. 网格生成。

CAE的另外一种方法是所谓的等几何分析方法（Isogeometric Analysis Method），这种方法用体样条来取代有限元方法。为了构造体样条，实体需要被剖分成具有特殊结构的六面体网格，这一问题在CAE领域被称为是“神圣网格”问题。大连理工大学的罗钟铉、雷娜团队和我们合作，提出了解决神圣网格问题的理论基础：神圣网格在实体表面诱导了曲面的叶状结构（foliations），而叶状结构和黎曼面的全纯二次微分等价。因此，从计算全纯二次微分入手，我们可以自动生成神圣网格，奇异线的数目达到理论下界。

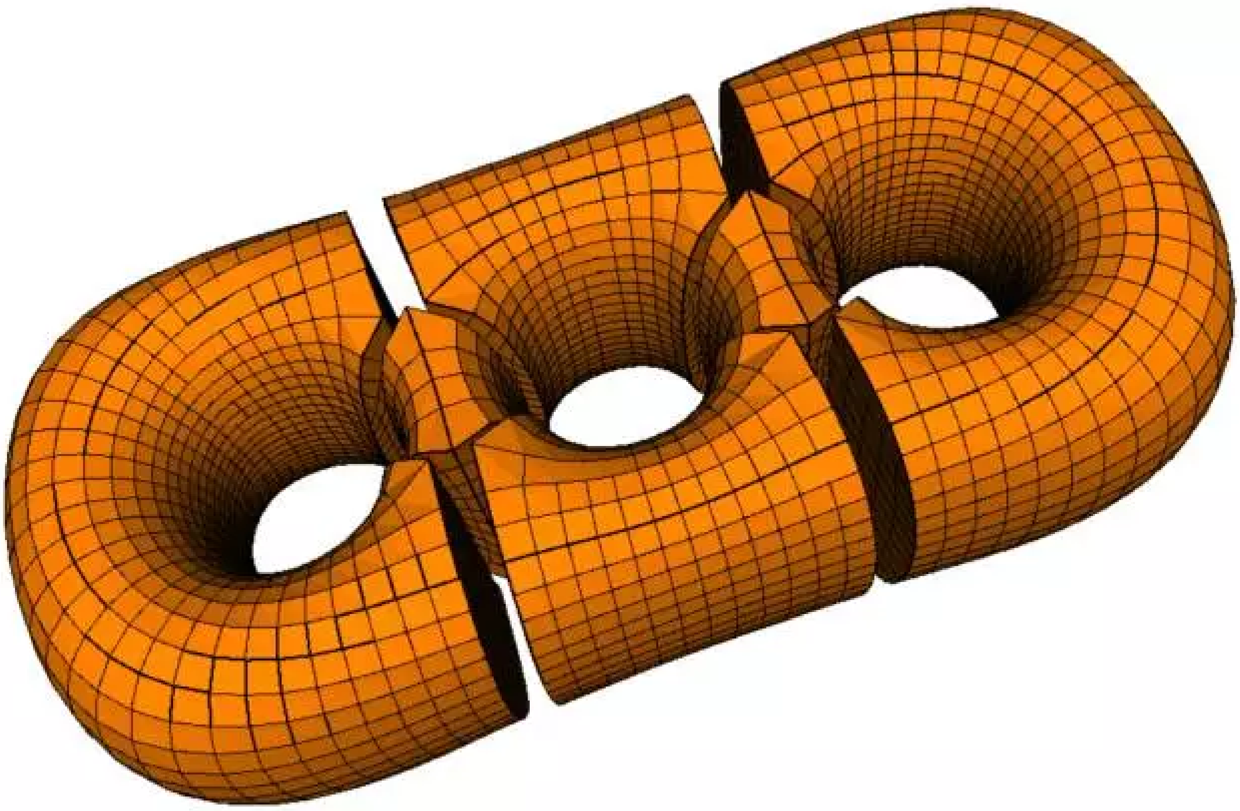

图4. 神圣网格。

实质上，吴文俊示性类揭示了仿射结构全局存在性的拓扑障碍；如果我们将仿射结构拓宽成射影结构，那么射影结构是全局存在的。更进一步，如何刻画射影结构的多寡？这就是曲面的叶状结构，或者全纯二次微分。简而言之，曲面本身的共形结构加上一个叶状结构就得到一个复射影结构。从这个角度而言，我们神圣网格的探索道路是直接受到吴先生示性类的启发而开拓的。

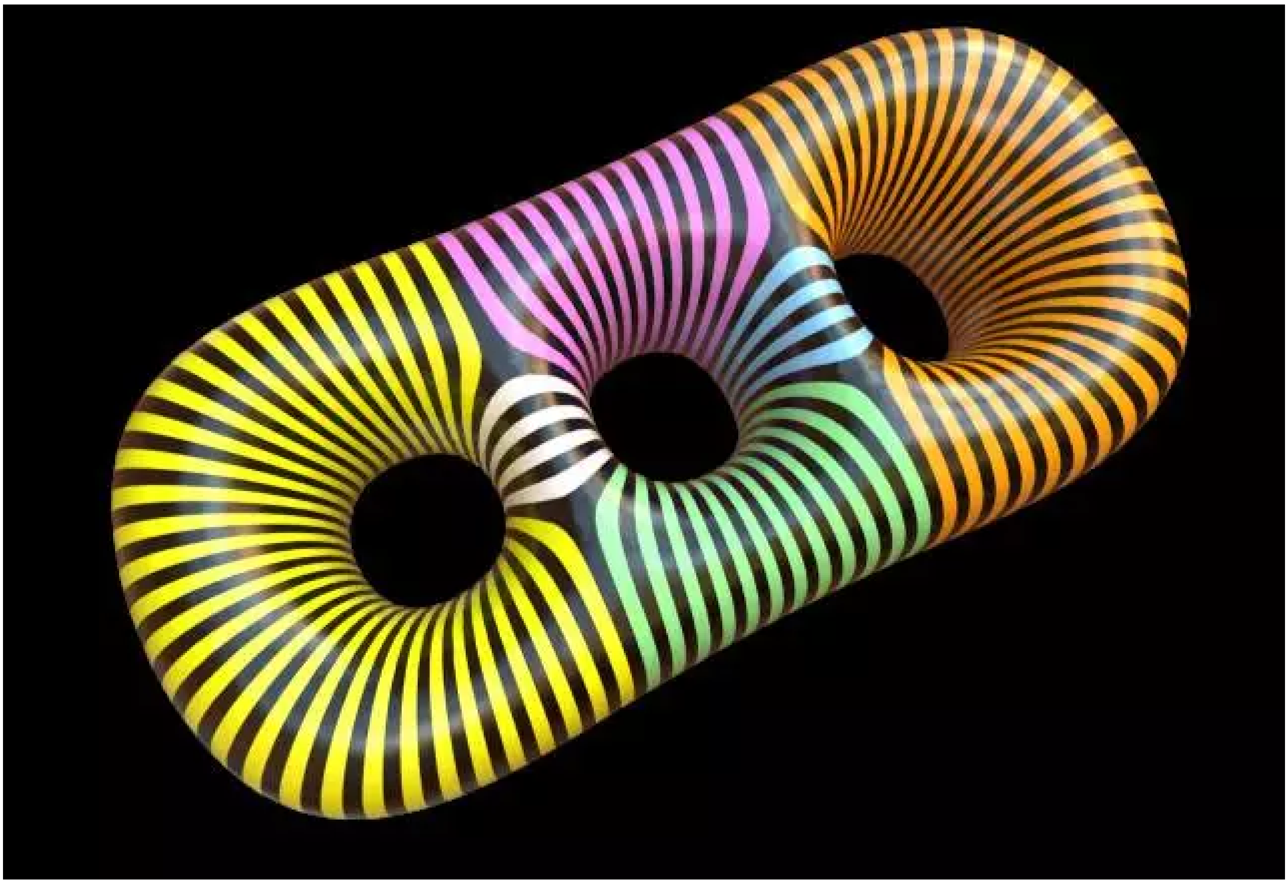

图5. 叶状结构（foliation）。

计算机视觉-吴方法

在计算机视觉中，一直有一个根本性的争论：一个三维物体，人眼只能得到从不同视角看过去得到的二维图像。那么人脑是将二维图像融合，得到一个整体的三维表示，还是存贮成一族二维轮廓线表示。由此，发展了不同的视觉算法。例如，目前基于深度学习的方法主要是基于第二种观点。如此，就自然产生如下的问题：给定光滑三维曲面嵌在三维欧式空间中，如何穷尽所有可能的轮廓线？如何将轮廓线分类，如何计算？

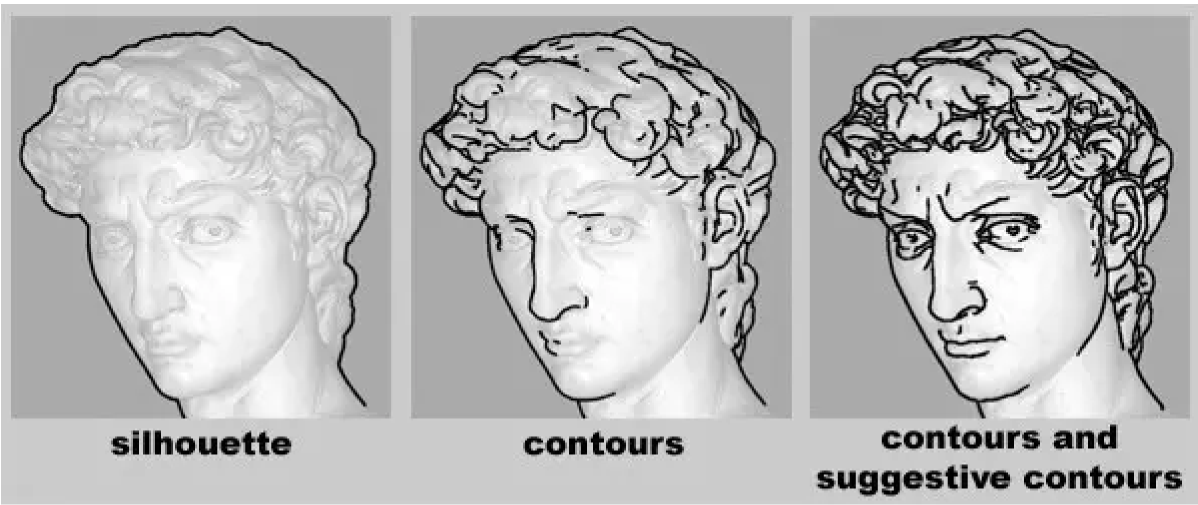

图6. 轮廓线（Contours）（DeCarlo et al. Siggraph 2003）.

轮廓线的性状相对复杂，依随视点的移动，有些轮廓线可以凭空突现，亦可以逐渐消失，不同的轮廓线可以彼此横截相交，也可以分离。如果，我们将所有的轮廓线进行同伦分类，那么如何刻画所有可能的同伦构型，以及同伦构型发生突变的视点位置，这些与曲面本身的微分几何具有内在的联系，同时和灾变理论（Catastrophe Theory）密不可分。

轮廓线对于人类的视觉感受具有重要意义，人类对于形状的判断和分析很大程度上取决于对于轮廓线的感受。因此在计算机图形学中，轮廓线的计算一直是备受关注的研究课题。我们团队曾经系统地研究过CAD样条曲面的轮廓线问题，我们发现样条曲面的轮廓线在图像平面上是一条代数曲线，因此可以用符号计算方法求得。对于这条代数曲线的奇异点的分析，给出了轮廓线伦形突变的分类。在这种情况下，轮廓线是个代数簇，其消逝理想的生成元可以用Groebner基方法来计算，也可以用吴文俊先生发明的吴特征列方法来计算。根据我们的经验，在这个问题上，吴方法的速度和性能远远优于Groebner基方法。

在计算机图形学中，高质量的渲染往往采用光线跟踪方法（Ray Tracing），这需要将参数表示的样条曲面转换成隐式曲面。参数曲面到隐式曲面的转换等价于求解多元多项式理想的一组生成元，吴方法为此提供了强有力的理论和计算工具。

人工智能-机器定理证明

吴先生倡导的初等几何定理机器证明在国际上获得了崇高的声誉，并且被弟子高小山等学者推广到微分几何定理证明。将知识体系严密化，系统化成公理体系一直人类科学活动的基本目标。从欧几里得的初等几何体系，到牛顿的力学理论，直到爱因斯坦的广义相对论都是用公理体系来阐明。建立于经验实证的量子力学迄今没有建立公理体系，超弦理论学家正在努力建立更为宏大而严密的理论。哥德尔的不完备定理指出对于任何一个包含算术公理的公理体系，都存在一个命题，其真与假都不与公理体系矛盾。有些人认为哥德尔定理推翻了公理化方法。实际上我们认为，哥德尔定理恰恰表明了人类对于知识的探索永无止境。在已知的范围之外，永远存在未知的世界等待我们去求索。

依随机器学习方法的兴起，人工智能领域的链接主义如日中天；而以吴方法为代表的符号主义暂时遭到冷遇。但是，深度学习的方法很快遇到了发展的瓶颈，那就是学习算法的不可解释性。如果吴文俊先生依然健在，他必然是能够解开深度学习黑箱之谜的首要任选。而吴方法的每一步都有严密的理论支撑，原则上推理的每一个步骤都可以被人类理解。我们相信，未来两种方法必然会相辅相成，融合共进。

今夜，让我们仰望星空，在浩瀚宇宙中，群星璀璨，有一颗吴文俊星熠熠闪烁。虽然吴先生离开了我们，但是他的思想将被无数人发扬光大，而万世长存。