

数学机械化研究的先行者

■ 石赫

吴文俊先生荣获2006年“邵逸夫数学科学奖”，美国的曼福德(D. Mumford)教授共获此项殊荣。本届获奖者的特点是，二位数学家都在两个不同的数学研究领域获得杰出成就。吴文俊的两个数学领域是：代数拓扑学和数学机械化。

20世纪50年代，吴文俊因在代数拓扑学中的杰出成就而享誉国际数学界。他是怎样进入代数拓扑学的研究，又是如何获得一系列重大成果的呢？

青年吴文俊踏进数学研究的大门时，幸运的得到陈省身先生的指导。陈先生告诉他要做“好”的数学。在陈先生的引领下，吴文俊很快进入代数拓扑学的前沿，经过几个月的努力，得到了惠特尼(Whitney)示性类乘积公式的简短证明。据说此公式的原始证明十分繁难，

以至于惠特尼本人计划写一本专著来阐述公式的证明。吴文俊在短时间里就得到这么重大的成果，令人称奇。

1947年，吴文俊考取赴法国留学。先后师从艾利斯曼 (Ch. Ehresmann) 和亨利·嘉当 (H. Cartan) 继续研读代数拓扑学。嘉当和艾利斯曼都是著名的布尔巴基 (Bourbaki) 学派的创始人。布尔巴基提出了用结构这一概念来贯串整个数学，从无结构的集合论与具有最基本结构的实数论开始，依次进入结构不同逐步丰盈的各个领域，追求数学体系的公理化、严密化。50年代以来，布尔巴基的影响已波及整个数学界。青年数学家纷纷接受他们的结构思想，推行他们倡导的公理化体系。吴文俊是最先接触布尔巴基学派的中国数学家，他深受布尔巴基学派数学思想的熏陶。

拓扑变换下的不变量，是拓扑学研究的重要内容。所谓示性类，是一种基本的拓扑不变量。留法期间，吴文俊专注于示性类的研究。1940年前后，有关示性类的文章陆续发表，短期内集中出现许多重要进展。吴文俊对这些重要的示性类进行深入系统的研究并分别为它们命名，是吴文俊首次使用了惠特尼示性类、庞特里亚金示性类、陈省身示性类的名称。吴文俊指出它们不同的数学内涵，论证了其它的示性类都可由陈省身示性类推导出，反之则不能，从而肯定了陈示性类的基本重要性。吴文俊建立了惠特尼示性类彼此之间的关系式，国际上称为吴（第二）公式。

进而，吴文俊在微分流形上引入了一类示性类，国际上称其为吴示性类，突出的特点在于它是可以具体计算的。吴文俊证明了惠特尼示性类用吴示性类表示的公式，国际上也称其为吴（第一）公式，从而使惠特尼示性类也变为具体可算的。抽象的数学概念变为具体可算的，是质的跨越。吴示性类的建立，使示性类变得易于理解，适宜应用，为拓扑学的应用开辟了广阔的局面。

对于这些成就，陈省身先生给予了高度评价，认为吴文俊对纤维丛示性类研究做出了划时代的贡献。

1950年吴文俊回国，以自己的科研成绩报效祖国、服务人民。多年后，接受采访时有记者问：您那时为什么谢绝了国外的优厚条件而毅然回国？吴文俊高声回答：出国留学，学业有成后自然要回国，这是天经地义的，许多人都这样做。这个问题，他对记者说，你倒是应该去问那些滞留国外的人，是什么原因使他们未能回来。

回国之后，他系统地研究拓扑流形的嵌入问题。所谓“嵌入”，是把由解析方程所确定的复杂的几何形体（即拓扑流形），在保持连续的前提下，安置到简单直观的欧氏空间内。拓扑学中，同胚不变量较之同伦不变量是更为重要、更为基本的，可是同胚不变量的研究十分困难。吴文俊将自己研究的目标，专注于同胚不变量的研究。他集中精力反复探索，建立了复合形的“吴示嵌类”的重要概念。并用类似的方法，研究浸入问题和同痕问题，建立了“吴示浸类”和“吴示痕类”的基本概念。

由于吴文俊在拓扑学研究中获得的杰出成就，他和同时代的另外几位年轻数学家，共同推动拓扑学蓬勃发展，使之成为20世纪的数学主流学科之一。吴文俊的一些研究成果成为代数拓扑学的经典，半个世纪以来一直发挥着重要作用。吴示性类、吴公式成为拓扑学的必修内容。吴文俊的研究成果对代数拓扑学具有奠基性，他以自己的学术思想影响了一大批学者，包括多位著名数学家。这充分显示了他的研究成果的深刻性、重要性。

1956年，吴文俊因在拓扑学中示性类与示嵌类方面的卓越成就，同时与华罗庚先生和钱学森先生，荣获首届“中国自然科学奖一等奖”。

1960年以后，吴文俊开设课程，率先把代数几何学引入我国。代数几何研究的基本对象是代数簇，即多项式组的零点集，大部分代数几何书上都是这样定义的。但是实际上，代数几何却是利用代数理想论建立和发展的。这样理论上较为一般，包括的面广些。吴文俊开展代数几何的研究，放弃当时国际上普遍流行的理想论的方

式，而采用零点集的论述方式。这为他10年后进行机器证明研究奠定了良好的基础。

他对代数几何开展构造性研究，重视代数簇母点这一概念的重要性。并且利用代数簇的母点，解决了公认的难题：对具有任意奇点的代数簇，建立了重要的陈省身示性类的定义。这是一项非常重大的成果。他的论文是1965年用中文发表的，这项成果未能及时传到国外。数年之后，国外有年轻数学家得到类似的结果，因而名噪数学界。

吴文俊的数学研究工作，正值高产丰收之际，却由于“文化大革命”爆发嘎然而止。等到“文革”后期，数学的研究工作逐渐恢复时，他已经做出战略转移，放下代数拓扑学和代数几何的研究，全身心的投入一个全新的数学领域——数学机械化的研究。

是什么原因促使吴文俊做出这样的战略抉择呢？

20世纪60、70年代，数学界对于数学科学发展现状的认识以及前景的预期产生严重分歧，争论激烈。那种误以为布尔巴基学派代表了整个数学的观念产生动摇，数学界在讨论数学应当如何发展。

留法时，吴文俊与关肇直先生建立了友谊，他们真挚的友谊持续了几十年。归国后在数学研究所，他们经常交流对数学的认识，对数学发展的看法。他们认为，数学科学的进步，不仅要依靠数学内部的矛盾，更要适应社会的需求。吴文俊非常赞同关肇直提出的主张：数学在进行理论研究的同时，也要注意为国家建设服务。

多年之后，吴文俊回忆道：“文革”期间，关肇直同志给了我非常大的影响。首先，关肇直带动数学所的同志学习恩格斯的《自然辩证法》。我原先对《自然辩证法》一无所知，学习之后受到影响，知道数学研究的数和形，不仅是抽象的，而且应该研究现实世界的数与形。这在思想上产生很大的影响。另外，关肇直还对我说，数学上如果跟着国外，追随外国，自然要经常出国，甚至久留国外，不然你还能怎么办？因为你的根子在国外。

关肇直不仅提出这个思想，而且身体力行，在数学所成立了控制论研究室，把研究方向与卫星和航天一些部门直接联系，课题就来自卫星航天部门，为这些部门提供所需要的数学方法，解决实际问题。关肇直这种思想，既要尊重外国，而应该立足国内的思想，不仅是应该受到大家的重视，而且这种思想是行之有效的。关肇直自己树立了这样一个榜样。

他把这种数学实践方式，称之为关肇直道路。

吴文俊回忆当时的想法：在这样的影响之下，我当时自然的就想，我应该怎么办？是不是也像关肇直那样，寻找一条自己的道路，立足国内，不受国外的影响。这是当时思想上引发的问题。

要认识现状，有必要借鉴历史。吴文俊认为：假如你对数学的历史发展，对一个领域的发生和发展，对一个理论的兴旺与衰落，对一个概念的来龙去脉，对一种重要思想的产生和影响等这许多历史因素都弄清楚了，我想，对数学就会了解得多，对数学的现状就会知道得更清楚、深刻，还可以对数学的未来起一种指导作用，也就是说，可以知道数学应该按怎样的方向发展可以收到最大的效益。

吴文俊花大力气研读数学史。他从关肇直那里借来一些数学史的资料，开始了数学史的学习。这些书籍中有英、美、德、法与苏联学者各种文字的著作，还有我国李俨、钱宝琮的中算史以及中国的经典书籍，如《算经十书》等。他又到科学院、北京市的图书馆，发掘馆中有关数学史的收藏，尽数借阅，博览中外的数学史著作。吴文俊花费了大量精力直接钻研中国古代数学的文献，围绕中国传统数学的特点，展开深入系统的研究。

他发现，西方的一些数学史著作，对中国古代数学成就或者视而不见、或者一笔抹杀，这种偏见与傲慢，令他义愤。中国古代数学的辉煌成就，则令他激动和深受鼓舞。数学史研究大致分为二途，一是考证，二是诠释。吴文俊则另辟视角，着重审视数学史在数学发展历程

中的地位、作用、影响、贡献。从而发现数学发展的线索和途径，理解数学发展的内在规律，寻求数学的进步与客观需求相适应的轨迹。

中国古代数学成就辉煌，既有系统的理论又有丰硕的成果，直到16世纪许多数学分支在国际上都处于领先地位，是名副其实的数学强国。那么吴文俊从历史中得到什么结论，受到哪些启发呢？

中国的传统数学，由求解几何问题以及其它各类实际问题，而导致方程求解，是古算术发展的一条主线。几何问题的解决，其答案往往以公式的形式出现。由观天测地导致的勾股弦公式、日高公式等等，都是从一些简单易明的原理导出的。然而在《四元玉鉴》中已经指出，如果引入天元（即未知数）并建立相应的方程，通过解方程即可自然的导出这些公式。这提供了一条证明与发现几何定理的新路：把非机械化的定理求证归结为机械化的方程求解。如何从数学发展的大局，对中国传统数学的丰富创造，给予概括和提炼呢？中国传统数学，以算法为主体，适宜在计算机上实现，具有机械化的特征。所谓数学机械化，就是在证明定理和求解方程的过程中，每前进一步，都有章可循地确定下一步该做什么和如何做。

吴文俊明确提出，中国古代数学是一种机械化数学，数学机械化思想是中国古代数学的精髓。

他进一步指出：中国传统的数学机械化思想，对数学的发展做出过巨大贡献。数学发展的历程中，存在公理化思想和数学机械化思想，理应兼收并蓄。公理化思想的成果以定理表述，而机械化思想的成果则常总结为算法（术）的形式。近代数学的伟大发现，如近世代数、解析几何、微积分的建立，无不闪烁着数学机械化思想的光辉。

解析几何是近代数学发展的开端。坐标概念的建立，是微积分学的基础。1637年，笛卡尔 (Descartes) 关于几何学的著作问世，书中清晰地展现了数学机械化思想。书中建立了一般的（不限于直角的）坐标系，引入了坐标的概念，从而实现了几何的代数化。书中没有考虑公理化的证明，而把重点转向几何问题的求解。书中把几

何问题求解转化为方程求解，应用代数方程求得几何问题的解答，表述为几何定理。此书是坐标几何的创始之作。解析几何的创立，是数学机械化思想的产物。

吴文俊分析了微积分学的创造过程，指出在这一重大的数学发现过程中，希腊式数学（如穷竭法、无理数论等）的脆弱性，以及中国式数学（如完备的实数系统、“祖暅原理”等）的生命力。以10进制小数为核心的实数系统，实际上已经完成了极限的概念，只是没有用现代数学的语言表述而已。而极限概念是微积分学的根基，中国已经接近微积分的大门。然而，极限的概念，对于希腊头脑来说是完全陌生的。“幂势既同，则积不容异”的“祖暅原理”，是讲述平面上的图形面积或空间内几何体的体积进行量度的，已具有积分概念的核心。历史上，在微积分的建立过程中，希腊式的数学软弱无力，而只有在引入了所谓“Cavalieri原理”东方式数学之后，方能取得成功。这个“Cavalieri原理”是和“祖暅原理”等价的。因此，自然可以得出结论：微积分学的伟大发现，中国式的机械化思想发挥了决定性的作用。

数学的实质跃进在于化难为易。在中国古代数学的成就中，吴文俊见到了许多实例，它们实现了化难为易的伟大创造。

十进位位值制，是中华民族的创新，是世上绝无仅有的独特创造。把0, 1, ……，到9这10个数字，因其在前后不同的位置又赋予相应的位置值，这样就可以利用这10个数字表示任意大的整数，同时使整数间的计算变得简便易行。这一创造使极为困难的整数表示和演算，变得这样简易平凡，以至于人们往往忽略它对数学发展所起的关键作用。十进位位值制的创造，化难为易，是人类文明史的光辉一页。

从颇费脑筋的算术四则问题，通过建立代数方程，到按部就班地求解代数方程，是数学发展史上实现机械化，化难为易的光辉范例，是数学的一次跃进，意义重大。

在解方程的发展过程中，天元概念（即未知数）和天元术（即建立方程）的发明是一种飞跃。天元概念和天元术的出现，使方程的建立也成为机械化的过程，从此变得轻而易举。这是机械化数学思想化难为易的又一次体现。在数学发展史上，其意义之重大是可与位值制的创造相提并论的。这是中华数学在数学上影响深远的又一贡献。

吴文俊总结道：是否能化难为易，以及如何才能化难为易，也就是把原来极为困难的数学问题，因为实现了机械化而变得容易起来，乃是数学机械化的主题思想，也是它的主要目标。

当今，计算机的功能不断增强，它作为工具将大范围的介入数学研究，这将对数学的发展产生重大影响。吴文俊指出：对于数学未来发展具有决定性影响的一个不可估量的方面是，计算机对数学带来的冲击。不久的将来，电子计算机之于数学家，势将与显微镜之于生物学家，望远镜之于天文学家那样不可或缺。吴文俊进一步强调：除了一些人所共知的作用外，计算机还提供了一个有力的工具，使数学有可能象其它自然科学一样，跻身于科学实验的行列。在这样的背景下，数学机械化思想，理应得到发扬光大，从而推动数学蓬勃发展。这是时代的要求，也是数学科学发展之必然。

数学机械化思想为数学科学的发展提供导向。在信息革命时代，数学将出现什么样的变化？尤其是，中国的数学将如何进步？这是数学家们经常思考的问题。数学的发展，应该适应信息时代的客观需求，也要遵循数学科学进步的内在规律。吴文俊明确提出了自己的方案：开展数学机械化研究，让数学机械化思想的光芒普照数学的各个角落。已故程民德院士曾经指出，吴文俊倡导数学机械化研究，是从战略的高度为中国数学的发展提出一种构想，实现数学机械化，将为中国数学的振兴乃至复兴做出巨大贡献。

战略构想的实现，首先要选好突破点。战略突破口选在那里？吴文俊想到：西方传统的几何定理证明，其形式与机械化迥然不同。是

否也可找到一条道路，使定理证明也成为机械化的呢？非常不机械化的欧氏几何，也走中国传统的几何代数化的道路，实现定理证明的机械化，使普通人都可证明复杂、困难的几何定理。若如此，则是数学发展历程中的又一件有意义的事。

他考虑得更多更远。几何是由代数控制的，应用不同的代数工具，会导致不同类别的几何，吴文俊深谙个中道理。他自然想到那些不具有微分运算的几何，如欧氏几何、非欧几何、球几何、投影几何、仿射几何、有限几何、代数几何等等。他将这些几何统称为初等几何。既然走几何代数化的道路，初等几何的定理证明能否也实现机械化呢。

上述这些几何，每种都是一个成熟的数学分支，都包含丰富的内容，掌握一门已属不易。现在要把它们做为一个整体来对待，建立一般的初等几何（不仅仅是欧氏几何）机器证明的理论和方法，其困难程度可想而知，涉足此类问题者自然寥寥，是否有前人想过则不得而知。

如是，实现初等几何的定理机器证明，需要积累广博的初等几何的知识，需要坚实的现代代数几何的基础，还要掌握计算机，亲自编写证明程序，亲自上机实践，这样才能独树一帜，别开生面。要掌握和理解这些数学知识已属不易，更何况开创这些几何定理的机器证明的理论和方法，自然是难上加难的。而这，恰恰是吴文俊追求的目标。

机器证明的实现，首先要在理论和方法上有所突破。引入坐标系之后，几何对象及它们之间的关系可由多项式表示。几何定理的假设可导出一组多项式方程（简称为“假设方程”），结论也表为一个多项式方程（简称为“结论方程”）。这不难，学过解析几何的人都能做到。证定理是从假设推导出结论，这就难了，要发现一条切实可行之路，能够按部就班地证明一类定理，那就更难了。按照通常的理解，所谓由“假设方程”推导出“结论方程”，代数的解释是，“假设方程”的每个解都是“结论方程”的解，用几何的语言描述则是，“假

设方程”所定义的零点集包含于“结论方程”所确定的零点集之内。然而问题的复杂超出了人们的想象。吴文俊发现，并非“假设方程”的每个解都是“结论方程”的解，实际上，“假设方程”的解中仅有一部份是“结论方程”的解，而另一部份却不是“结论方程”的解。用甚么办法区别和界定“假设方程”解中的两个部份，又如何给出合理的几何解释，是实现几何定理机器证明必须克服的困难。

几何对象之间的关系相互牵扯，导致不同点的坐标在“假设方程”中前后交错。因此，必须对“假设方程”进行处理，使之从杂乱无章变得井然有序，适宜机证定理的需要。代数几何的研究经历，使吴文俊熟知多项式代数运算的几何内涵，因而能够料想有哪些途径，该如何入手化繁为简做到这一步。把预想变为现实，要进行艰难的探索，吴文俊日日夜夜的演算推导，过程中出现的多项式经常有数百项甚至上千项，需要几页纸才能抄下，稍有疏漏演算则难以继续。经历数月的奋战，浑然忘我，终于建立了多项式组特征列的概念。以此概念为核心，提出了多项式组的“整序原理”，创立了机证定理的“吴方法”，首次实现了高效的几何定理的机器证明。

应用“整序原理”进行初等几何定理证明的过程中，自动导出一组多项式，这组多项式不等于零称之为“非退化条件”：几何定理只有在“非退化条件”成立时才是正确的。在定理的“假设方程”所定义的零点集中，“非退化条件”界定了使定理成立的部分。“非退化条件”的建立，是“吴方法”的重大贡献。

机证定理的成功，获得国际自动推理（包括人工智能）学界的高度赞扬和推崇。1997年，吴文俊因在数学机械化研究方面的开创性贡献获“Herbrand自动推理杰出成就奖”。此奖是国际自动推理学界的最高奖项，每两年颁发一次，每次最多授给一人，获奖者都是自动推理学界的领袖人物。

数学机械化研究得到国家领导部门的有力支持。1979年底系统科学研究所成立。当时，吴文俊开展机器证明的研究，几乎是单枪匹

马、孤军奋战。面对种种议论的压力，理解和支持就更为宝贵。系统所所长关肇直当众宣布：进行数学研究，老吴（当时所内人员都这样称呼他）想做什么就做什么，完全由他自己决定。这样就为吴文俊排除了烦人的非学术性干扰，创造了宽松的学术环境。

中国科学院把第一台国产的台式计算机划拨给吴文俊，用于开展机器证明的研究，之后，又支持系统所购置HP-1000计算机，为机器证明研究提供有利条件。1988年1月，国家自然科学基金委员会，组织实施“七五”数学重大项目《现代数学中若干基本问题的研究》，吴文俊的“机器证明”列入其中。1990年，国家科委（现国家科技部）对吴文俊开创的这项研究给予重大支持，科委基础司从科研特别支持费中拨出专款100万，支持机器证明的研究。这一举措，立即在数学界引起很大轰动。同时，中国科学院决定在系统所成立“数学机械化研究中心”，吴文俊任中心主任。

1990年8月，数学机械化研究中心成立大会在科学会堂隆重举行。中国科学院周光召院长出席，国家科委、中国科学院、国家自然科学基金委等部门的主要领导到会祝贺，在京的数学界的学部委员（院士）和一些院校的代表也到会对数学机械化研究中心的成立表示祝贺。成立大会仪式简朴，隆重而热烈。

这样，在国家领导部门的大力支持下，数学机械化研究摆脱了单枪匹马惨淡经营的状况，进入组建团队蓬勃发展的局面。

数学从线性到非线性的第一步跨越，是由多项式的出现而实现的。多项式方程组求解，是数百年未能很好解决的难题。原有的解法在理论上多多少少存有欠缺。在吴文俊建立的“整序原理”中，提出了多项式组特征列的概念。以此概念为核心，给出了求解多项式方程组的特征列方法，被称为“吴特征列法”或“吴消元法”。“吴消元法”的突出特点是，在理论上是完整的。

分析所取得的成绩时吴文俊指出，我们是遵循我国古代机械化数学的启示，把几何代数化，把非机械化的几何定理证明转化为多项式

方程的处理，从而实现了几何定理的机器证明。初等几何定理的机器证明是战略突破点，由此打开局面，再逐步走上更一般更深层的数学机械化之途。数学不同分支中许多的问题，自然科学不同领域中很多的问题，高新技术中大量的问题，都可转化为多项式方程组求解。机证定理仅是解方程的一项重要而成功的应用，解方程才是数学机械化研究的核心内容。

吴文俊身体力行，把求解多项式方程组的特征列法推广到微分的情形，建立了求解代数微分多项式方程组的微分特征列法。他本人的研究工作，已将解方程应用到许多领域，如线性控制系统、机械机构综合设计、机器人运动学分析、平面星体运行的中心构形、化学反应方程的平衡、代数曲面的光滑拼接、全局优化求解等等。

2000年，吴文俊因在代数拓扑学和数学机械化领域的杰出贡献，荣获首届“国家最高科学技术奖”，袁隆平先生同时获此殊荣。这是国家和我国科学界对吴文俊倡导数学机械化研究的表彰。六年后，吴文俊获得邵逸夫数学奖。

邵奖是一项国际大奖。邵逸夫数学奖的得主，第一届是整体微分几何的奠基者陈省身(S. S. Chern)先生，第二届是证明费尔马大定理的怀尔斯(A. Wiles)教授。吴文俊先生获奖是第三届。本届数学奖的评委都是国际上顶级的数学家，五位评委中有三位菲尔兹奖获得者。颁给吴文俊的授奖词是这样的：

由于他对数学机械化这一新的交叉领域的诸多贡献。

(For his contributions to the new interdisciplinary field of mathematics mechanization.)

这是一项重要的标志，表明国际数学界对数学机械化研究的认同，也是国际数学界对吴文俊倡导数学机械化研究的赞扬。

吴文俊从事数学研究已经六十余载，成就斐然。在崎岖的科学道路上奋勇攀登的征程中，高屋建瓴、科学的大局观，是他获得成功的重要保证。倡导数学机械化研究的成功，反映出吴文俊对数学科学的认识和理解，也充分表明他是一位具有战略眼光的数学家。

数学兴，君先行。吴文俊是数学机械化研究的先行者。他的学术思想影响了许多数学家，他开拓的一些研究方向成为年轻数学家施展才华的广阔天地，他为弘扬中国传统数学的光辉成就做出了巨大贡献，他为中国数学屹立于世界数学之林赢得了尊重。

吴文俊指出，数学机械化思想是一种思维模式，一些数学分支正是由于踏上了机械化的道路而获得蓬勃发展的，使之成为重要的研究方向，甚至成为数学的主流。他以自己熟悉的代数拓扑学为例解释道，庞加莱 (Poincare) 以解析方程组所定义的几何图像作为研究对象，建立了代数拓扑学。稍后又引进了复合形的概念，使某种程度的机械化考虑得以成立，从此拓扑学得以飞跃发展，成为当代数学中最有影响的学科之一。他还举例，当代最活跃的几何学领域，微分几何与代数几何，有着直观的背景，它们最基本的几何对象，都是通过坐标与方程来表达的，隐含着几何代数化的思想。数学的各个领域，都有自身的发展模式，有着自己的定理求证和问题求解，如何走上机械化的道路，有待于各行各业专门家的努力。

我们还有很多事情要做，吴文俊先生说。

(作者为中科院数学与系统科学研究院研究员)