

忆“吴龙”^{*}

■ 李文林

从1960年9月开始，吴文俊院士亲自为中国科学技术大学数学系60届学生讲授微积分课程。该课程到1962年初结束，整整延续了三个学期。随后，吴先生又为该年级讲授了一个学期的微分几何学。1963年该年级分专门化以后，吴先生则指导了几何拓扑专业的学生。由吴先生主持的这个一条龙式的教学过程，后来以“吴龙”著称。吴先生的微积分课程分两大部分：第一部分微分学，主要内容包括：数、量、形与极限；数量的依存关系——函数及其连续性；单变量微分学。第二部分积分学，主要内容包括：二重积分；三重积分或多元积分；微分与微分形式；积分公式。（详见附录：吴文俊院士微积分教程讲义目录。）

^{*} 本文是在与李邦河、徐森林、陆柱家教授讨论的基础上写成，李邦河院士提供了吴文俊先生的微积分教程讲义等原始材料。

微分学的开篇“数、量、形与极限”，重点是建立实数理论，这是整个课程的“龙头”。吴先生的第一堂课开门见山，用Dedekind分割定义实数。这样引进实数，除了集合概念外不需要其它预备知识，对于刚从中学毕业的学生来说相对容易接受。当然随后关于实数连续性或完备性及其证明的介绍，对初进大学门的人而言就比较陌生了，但吴先生的讲解清晰明了，同时注意思维方式的引导。可以说，这个龙头部分的教学不仅使同学们打下了进一步学习数学分析的基础，而且在思维方式上跃升到一个新的平台。

作为整个课程的“龙尾”，积分学的终篇则是一般形式的Stokes积分公式。对积分学的处理，尤其是关于不同维数的积分之间关系的讨论，是吴先生微积分课程最别具一格的部分。关于一光滑曲面或一闭区域的积分与关于其边界的积分之间的关系，数学家 Gauss, Ostrogradsky, Green 以及 Stokes 等都曾得到一些特殊的定理和公式。一般的微积分教科书就是介绍这些特殊的定理和公式（如奥—高定理、格林公式）。而恰如吴先生在他的讲义中所指出：“重要的是现在可以综合为一个定理，其特殊形状曾由Stokes证明，因而也就称为Stokes定理。这个定理的一般形状是Elle Cartan建立的。”吴先生的讲义正是以交错微分（外微分）形式为工具，最终阐述并证明了一般的史托克斯定理，而通常的奥—高定理、格林公式等均成为其特例。这样的处理具有理论高度，展示了数学的统一性，可以说是高观点下的微积分。但同时吴先生又以相当的篇幅介绍了交错微分形式的物理背景，给出了具体详尽的场论解释，使同学们认识到了抽象数学的实际意义与应用价值。

就这样，从19世纪分析严格化的基础成果——实数理论到20世纪微积分的现代发展——Cartan的一般积分定理及其应用，反映了吴先生微积分课程的特点：浓缩精炼而又内涵丰富，立足基础而又观点高、寓意深。应该说，学习和理解这样的课程对同学们来说不无困难，但吴先生的课程同时具有另一个密切相伴的特点，即严密推理与

直观引导相结合。吴先生的课堂讲授更是由浅入深，发人思维。每堂课开始，吴先生总会先在黑板上写出中心问题，然后是循序渐进、透彻自然的分析，最后给出结论（定理），这时结论的证明往往已是水到渠成了。吴先生讲课喜欢画图，他画的图很漂亮，直观切题，令人印象深刻。总之，严谨先进的理论体系，深入浅出的呈现形式，使吴先生的微积分课程散发着特有的魅力，吸引着同学们刻苦学习，大部分同学都能及时跟进，甚而渐入佳境。

当然，吸引同学们的，除了吴先生课程的科学魅力，还有这位著名数学家的人格魅力。吴先生到科大开课时，已经是学部委员，国家自然科学一等奖得主。当同学们坐在科大的教室里亲耳聆听这位他们仰慕已久的数学大师讲课时，同学们的感觉岂止是幸运，而当他们看到这位大数学家对于微积分这样一门基础课的教学是那样认真和投入，同学们的感情又岂止于仰慕！吴先生为这门课程精心编写了讲义。当时没有计算机，讲义一般由学校刻印室刻写油印。但有一次同学们惊讶地发现发下来的讲义竟是吴先生自己的字体。也许是当时刻印室忙不过来，或者是这部分讲义（内容是关于交错微分形式）特殊符号太多，总之吴先生亲自刻写了这部分讲义！还有一次，同学们在发下的讲义中看到这样一段注文：“原讲义关于函数相关一节中的第二个定理[页7]是错误的，邹同学曾经指出并举出反例如下……”。事情原来是这样的：一位同学发现在之前的讲义中关于函数相关的一条定理有问题，并向吴先生反映。吴先生验证后立即在后续讲义中作了更正，并公布了该同学举的反例。这件事说明吴龙教学过程中同学们勤学好问及师生互动的活跃气氛，同时也反映了吴先生爱护学生的学习热情、鼓励他们独立思考与创新的宽广胸怀。正是通过这一桩桩看似平凡的事例，同学们深切感受着这位名重数坛的学者品格和风范。

除了自编讲义，吴先生还指定菲赫金哥尔茨的《微积分教程》作为主要参考书。而对于他自己编写的讲义，吴先生一直没有正式付诸发表，这可能是一个遗憾，但或许也恰恰反映了吴先生的风格。

正如前面说过的那样，吴先生的微积分课程相当浓缩，因此课外辅导相当重要。当时担任吴先生微积分课程助教的是李淑霞老师。李淑霞老师负责答疑、辅导、上习题课，并帮助学生与吴先生沟通。她耐心细致的辅导对于同学们学好吴先生的微积分课程可以说功不可没。在讲到交错微分形式一章时，吴先生还请来中科院数学研究所的李培信老师给大家作辅导。

微积分课结束之后，紧接着二年级下学期吴先生又开了一门基础课——微分几何。这一次吴先生没有像微积分课那样另编讲义，而是直接采用德国数学家L. Bieberbach的微分几何讲义作为这门课的教材，主要内容包括：第一章、欧氏平面上的曲线；第二章、欧氏空间中的曲线；第三章、欧氏空间中的曲面。最后这一章还涉及曲面上的几何，并以张量分析初步结束。显然，这也是一种高观点下的基础课程。

除了微积分和微分几何，科大为数学系60届安排的其它基础课程有：

复变函数论：开始由华罗庚主讲，中途因华先生出国，由龚升接替，最后关于黎曼曲面的部分则是由陆汝钤讲授（华先生指定的主要参考书是梯其玛希《函数论》）；

三角级数：王元主讲；

实变函数与概率论：陈希孺、殷涌泉主讲（李乔老师辅导实变函数论）；

线性代数：曾肯成主讲；

偏微分方程：陈立成主讲；

常微分方程：董金柱主讲（另有常微分方程稳定性理论课专请中山大学许淞庆先生主讲）；

积分方程：赵立人主讲；

变分法：赵立人主讲；

分析力学：董金柱主讲。

以上课程都是在三年级讲授。其中复变函数论课程本来是华罗庚先生为61届所设，但安排60与61两个年级合班听课，说明当时科大数学三龙教学是互有交流的。华罗庚的名字在中国可以说是家喻户晓，同学们从小就熟悉他自学成才的故事，而现在这位传奇式的数学家就近在咫尺给大家授课。在基础课学习阶段就能零距离领略多位大师的不同风采，对身在科大校园的同学们来说，真可谓得天独厚。华先生的课别具华龙特色，当有另文记叙，这里不再赘述。

当时的科大，名师荟萃，这样说是毫不夸大的。除了有众多院士亲临开课，整个师资队伍阵容强大。在上列曾给60届上课的老师中，就有三位后来当选为中国科学院院士（王元、陈希孺、陆汝钤）。老师们讲课各有特点，不拘一格，这方面同学中流传有不少脍炙人口的美谈。实变函数论是一门比较难学的课程。记得任这门课的殷涌泉老师，讲课有条不紊，不慌不忙。他自己对同学们说：“我的课讲得不好，太慢。”但几个星期以后，同学们发现已经学过的内容可不少，真是“轻舟已过万重山”！这门课的指定参考书是那汤松的《实变函数论》，书中的习题出名地难，有的简直可作一篇小论文的题目。在陈、殷两位老师的引导下，同学们踊跃做题，并相互比试、交流。主讲线性代数的曾肯成老师，上课从来不带片纸讲稿，总是仅拿一枝粉笔上台，数十阶的矩阵，跃然板面，运算自如。矩阵，在曾肯成老师手中，不啻是有生命的符号。……总之，当时的课堂教学，既严肃紧张，又生动活泼。在这里，数学老师们，从院士到讲师，就像是风格各异的风笛手，吹奏着奇妙的数学之音，吸引着一群群“年青的老鼠”走上数学之路¹。

按当时的教学大纲，科大数学系的学生必须学习甲类物理课程。先后为数学系60级开设的物理（含力学）课程有：

¹ 风笛手与老鼠的比喻参见C.瑞德：《希尔伯特》，页240。上海科学技术出版社，1982。

力学；普通物理学；流体力学；电动力学（含相对论）；分子物理学（含热力学）与原子物理学。

其中力学课是与力学系的同学合上，由著名地球物理学专家傅承义先生主讲。

由于当时中学一般都不教解析几何，因此科大为数学系一年级学生补开了解析几何，60级的解析几何课由李炯生老师主讲。另外60级学生还学过画法几何。

当时科大的教学显然是有战略考虑和全面计划的。因此，虽然吴文俊先生没有继续直接参与60级学生三年级阶段的基础课教学，但我们把上述的基础课教学看成是一个整体。三年级以后，数学系60级学生划分为4个专门化：几何拓扑专门化；微分方程专门化；运筹学专门化和计算数学专门化。吴先生很自然地回来指导几何拓扑专门化。事实上，几何拓扑专门化的名称，就是吴先生本人确定的。数学系领导考虑到吴先生的专业特长，原来拟将这个专门化取名为拓朴学专门化。吴先生提出加上“几何”二字，以强调课程的直观几何背景，并区别于过于抽象的点集拓朴学。吴先生亲自为该专门化的学生开设了一门专业课程——代数几何（邓诗涛老师和李乔老师辅导），而拓朴学课程则是请中科院数学所岳景中老师（代数拓朴）和李培信老师（微分拓朴）来讲授，熊金城老师担任辅导。这个专门化一共有9名学生，其中一位——李邦河现已成为中国科学院院士。李邦河是数学系60级学习最优秀的学生之一，毕业后长期坚守拓朴学及相关领域研究，因在微分拓朴、量子不变量与低维拓朴、非标准分析与广义函数、单个守恒律间断解的定性研究等方面的突出贡献于2001年当选为院士。李邦河常常以自己切身的体会来回顾总结吴龙教学的特色和对他的影响，他至今还几乎完整地珍藏着吴龙教学的讲义和笔记。

吴文俊院士在科大开设微积分课程离今已将近半个世纪，但许多同学还清楚地记得吴先生给大家上第一堂课的情景。吴先生身着灰蓝

色风衣，稳步走上讲台，以这样的话开始他的课程：“微积分是初等数学与高等数学的分水岭。”在一年半的时间里，每周二节，风雨无阻，吴先生以他那深入浅出、独树一帜的课程，引导同学们步入高等数学的殿堂。多年以后，每当数学系60级同学聚会之际，大家都会深情地回忆当年吴龙教学的盛况，一致感到吴龙教学，包括吴先生本人的课程和所有的配套教学，为自己的终身发展奠定了坚实的基础，成为每个人在不同岗位上为人民服务、为国家效力的无尽资本。科大数学系60级两个班共83名学生，毕业后分配到科研院所、高等院校、产业部门（包括电力、气象、钢铁、石油、交通、信息、出版等）、国防单位（包括航天、核工业、兵器、装备、总参等）和政府机关等各条战线，多年来，在不同岗位、不同职位上为国家的发展作出了贡献。据不完全统计，他们中已有42人获得了教授或研究员职称（其中博士导师15人）；15人获高级工程师职称，特别是，如前所述，其中已产生中科院院士一名。此外，还有一人被授予少将军衔，一人担任全国政协常委。将近半个世纪以来，同学们无论走到何地，也无论职位高低，都以在科大接受的教育为终生的荣幸和不断奋进的动力。

总之，吴龙教学的特点、意义和影响，值得认真回忆总结。吴龙，与由华罗庚主持的“华龙”和关肇直主持的“关龙”一道，各放异彩，交相辉映，无愧为中国现代数学教育史上的创举！

（作者为中科院数学与系统科学研究院研究员）

附:

吴文俊院士微积分教程讲义目录
(中国科学技术大学1960.9—1962.1)

I. 微分学

第一章 数、量、形与极限

- §1 度量与实数
- §2 实数系统的连续性
- §3 实数系统连续性原理的一些简单应用
- §4 极限概念
- §5 极限的一般定理
- §6 一些重要的极限
- §7 点集与聚点
- §8 平面上点与图形的解析表示
- §9 平面与空间中的点集
- §10 复数与向量

第二章 数量的依存关系——函数及其连续性

- §1 函数的概念
- §2 函数的图示法
- §3 函数的某些简单性质
- §4 初等函数
- §5 函数的连续性
- §6 初等函数的连续性
- §7 函数在一点附近的变化与函数的极限
- §8 一些重要的函数极限
- §9 连续函数的一些简单性质与应用
- §10 均匀连续或一致连续

第三章 单变量微分学

§1 导数概念

§2 导数的基本性质

§3 高级导数

§4 几个基本定理

§5 导数应用之一——函数的增减性与凹凸性

§6 导数应用之二——极大与极小

§7 导数应用之三——不定式

§8 导数应用之四——质点的运动

§9 导数应用之五——简易微分方程²

§10 导数应用之六——误差估计、微分概念

II. 积分学

第一章 二重积分

§1 问题的引起

§2 平面上的可测域

§3 二重积分的定义及存在条件

§4 二重积分的性质

§5 二重积分的计算

§6 二重积分的变数代换

§7 二重积分的应用

§8 反常二重积分

第二章 三重积分或多重积分

§1 问题的引起

² 第三章第九节“导数的应用之五——简易微分方程”中以微分方程解的形式引入了原函数概念，论述了微分与积分运算的互逆关系。这样的处理也是吴先生微积分课程的一个特色。

§2 三重积分及其计算

§3 多重积分

第三章 微分与微分形式

§1 线性逼近

§2 基本形式

§3 基本形式的约化与微分的引进

§4 交错微分形式及全微分

§5 变数代换

附: 交错微分形式的物理背景

第四章

§1 单纯剖分与域的定向

§2 变数代换公式

§3 沿着 n 维空间中 r 维光滑曲面的积分

§4 积分公式